

引力波数据处理技术*

胡一鸣¹, 梁正程², 范会敏²

1. “天琴计划”教育部重点实验室, 中山大学天琴中心 & 物理与天文学院, 天琴前沿科学中心, 国家航天局引力波研究中心, 广东 珠海 519082
2. 华中科技大学物理学院, 湖北 武汉 430074

摘要: 空间引力波探测是天文学、物理学未来数十年的发展重点和科研热点。而, 空间引力波探测的科学目标, 必须经由数据处理实现。因此, 结合实际空间引力波探测器, 开展数据处理研究, 是兑现空间引力波探测科学价值的必要保证。本文针对空间引力波探测, 结合天琴, 介绍了引力波数据处理中的匹配滤波概念, 并对引力波信号探测及参数估计进行了论述。

关键词: 引力波; 数据处理; 天琴

中图分类号: P141 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 01-0112-11

Techniques for gravitational wave data analysis

HU Yiming¹, LIANG Zhengcheng², FAN Huimin²

1. MOE Key Laboratory of TianQin Mission, TianQin Research Center for Gravitational Physics & School of Physics and Astronomy, Frontiers Science Center for TianQin, CNSA Research Center for Gravitational Waves, Sun Yat-sen University (Zhuhai Campus), Zhuhai 519082, China
2. School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

Abstract: Space-borne gravitational wave detection has been the research focus and hotspot for the field of astronomy and physics and will continue to be so. The scientific goal of space-borne gravitational wave missions must be achieved through data analysis. Therefore, to carry out data processing research combined with actual space-borne gravitational wave detectors is an important premise for achieving the scientific goal of space-borne gravitational wave missions. We based on the space-borne gravitational wave missions TianQin and introduce the concept of matched filtering in gravitational wave data analysis. Furthermore, we introduce some basic concepts related to gravitational wave signal detection and parameter estimation.

Key words: gravitational waves; data analysis; TianQin

1 引言

约瑟夫·韦伯是引力波探测的先驱者。早在 20 世纪 60 年代, 他就建造了两个相隔上千公里的探测器, 以便有效地隔绝环境噪声产生的误警。这是因为, 如果两个探测器相隔足够远, 它们的

噪声就可以看作相互独立, 而引力波以光速进行传播, 当两个探测器同时检测到信号时, 极有可能是来自引力波信号而非噪声。1969 年, 韦伯宣称发现了引力波信号^[1]。然而, 后续的研究表明, 韦伯宣称的引力波信号在强度、频次上都与理论

* 收稿日期: 2020-11-05

录用日期: 2020-11-13

网络首发日期: 2021-01-13

基金项目: 广东省基础与应用基础重大项目 (2019B030302001); 国家自然科学基金 (11703098)

作者简介: 胡一鸣 (1989 年生), 男; 研究方向: 引力波天文学、引力波数据处理; E-mail: huyiming@syzu.edu.cn

计算结果相差悬殊, 其他团队建造的更为灵敏的探测器也宣布无法探测到引力波事件; 甚至有人发现, 韦伯在相隔三个时区的两个信号中寻找同时信号的时候, 未将时差这一因素纳入考量^[2]。

在 2014 年, BICEP2 团队宣称在宇宙微波背景辐射上观测到了 B 模偏振, 并召开新闻发布会宣称发现了宇宙暴胀的证据^[3]。然而, 后续的研究表明, 在扣除星际尘埃的效应后, 原有数据无法对宇宙暴胀提供任何限制^[4]。

韦伯是执着的, 直到他去世, 都依然坚信他成功地探测到了引力波; 他宣称的探测结果, 从事实上也引导了大批天才的学者涌入到引力波探测这一领域。BICEP2 团队的探测结果, 也成功地激发了全球对早期宇宙学实验测量的兴趣。这些令人遗憾的“误警”, 都源于不严谨的数据处理, 这一点值得深思和警醒。反过来, LIGO/Virgo 团队在宣布探测前, 在数据处理方面做了大量深入而细致的工作^[5-11]。有理由相信, 在天琴开展空间引力波探测时, 严谨的数据处理是极为关键的一环^[12]。

空间引力波探测, 具有引力波源丰富、科学前景深远的重要意义^[13]。具体分析引力波探测器的科学目标时, 可以采用较为简便的 Fisher 信息矩阵方法。然而, 在信噪比较低的情形下, 该方法所依赖的近似条件失效, 因此其估计结果与实际情况存在一定差别^[14]。进一步的定量分析, 必须依赖数据处理流水线的开发和运行, 再通过模拟数据分析, 开展相应研究。国际上, LISA 团队正在通过模拟数据挑战, 建立自己的数据处理流水线^[15-16]。需要注意的是, 不同的探测器频段、运作方式各具特色: 就固定轨道面的空间引力波探测器而言, 存在周期性的数据不连续、探测器轨道面指向固定等特点。因此, 不同项目之间的数据处理软件应该相互借鉴, 并结合仪器进行深入研究。

本文将对天琴相关引力波数据处理技术进行简单介绍, 第二章主要介绍引力波数据处理的核心思想, 即匹配滤波方法, 配合噪声的功率谱密度和给定的引力波波形, 可以定义信噪比、似然函数等; 第三章介绍了引力波数据处理的关键步骤, 分为探测与测量。除了利用波形模板库进行匹配滤波以外, 在特定情况下数据处理方法可以得到简化(双白矮星情形)甚至颠覆(随机引力波背景)。再者, 可以利用 Fisher 信息矩阵方法分

析参数估计精度; 在信号探测后, 需要利用贝斯随机采样算法, 包括马尔科夫链蒙特卡洛、层级采样算法等实现参数估计。在第四章我们将进行简单总结。

2 匹配滤波

虽然在给定物理参数的前提下, 可以确切地描述引力波信号, 但信号通常蕴藏在随机的噪声中。因此, 从噪声中提取信号必须依赖统计学方法。通过对仪器特性的理解, 可以预期噪声的统计学特性; 更进一步地, 可以据此计算得出相应数据 x 的概率 $p_0(x)$ 。倘若数据中存在引力波信号, 却依旧使用噪声假设进行计算, 就会改变对应的概率分布。与此同时, 如果更换模型, 在引力波信号存在的前提下, 计算得到测量数据的概率, 则可以得到一个不同的概率 $p_1(x)$ 。从引力波探测器数据中搜索出引力波信号存在的方法, 就可以归结为对信号模型下的概率 $p_1(x)$ 和噪声模型下的概率 $p_0(x)$ 的比对。

我们将首先定义几个术语。首先, 信号是由引力波源产生的引力波信号, 经引力波探测器的响应, 而记录到探测器上的成分, 即 $h(t) = h_+(t)F_+(\theta, \phi) + h_\times(t)F_\times(\theta, \phi)$; 其次, 噪声是由探测器在探测过程产生的, 不对应引力波信号的成分, 通常由第 2.1 节中介绍的噪声功率谱密度描述。当然, 功率谱密度可以具有确定性, 但噪声本身具有误差起伏, 通常用 $n(t)$ 来表示。最后, 探测器记录到的数据是信号和噪声两部分的线性叠加。亦即, 数据 $D(t)$ 展开为^[17] $D(t) = n(t) + h(t)$ 。

2.1 噪声功率谱密度

对于高斯、稳态的时序噪声 $n(t)$, 可以用功率谱密度 $S_n(f)$ (PSD) 或者其开根后的功率谱密度 (ASD) 去描述噪声的频率域性质。运用 Wiener-Khinchine 定理, 可以证明噪声的功率谱密度是其自相关函数的傅里叶变换。更进一步, 也可以得到 $\langle \tilde{n}^*(f)\tilde{n}(f') \rangle = \frac{1}{2} S_n(f)\delta(f-f')$ 。

对于空间引力波探测器, 由于长波近似在相对高频处失效, 通常会把响应函数的衰减结合到噪声项中, 我们以灵敏度曲线来表示这种噪声与响应函数的组合。天琴的灵敏度曲线可表示为

$$S_n(f) = \frac{1}{L^2} \left(\frac{4S_a}{(2\pi f)^4} \left(1 + \frac{10^{-4}}{f} \right) + S_s \right) \left(1 + 0.6 \left(\frac{f}{f_*} \right)^2 \right),$$

其中 $S_a^{1/2} = 1 \times 10^{-15} \text{ ms}^{-2}/\text{Hz}^{1/2}$ 是检验质量上的残余加速度噪声, $S_x^{1/2} = 1 \times 10^{-12} \text{ m}/\text{Hz}^{1/2}$ 是相应的位移噪声, L 是干涉臂的臂长, 而长波近似在传递频率 (transfer frequency) $f_* = 1/(2\pi L)$ 附近失效。其灵敏度曲线为图 1。

图 1 展示了天琴的灵敏度曲线, 基于探测器对不同方向、不同偏振引力波的不同响应, 黑色曲线对应在方向上进行积分后的灵敏度曲线, 而红色曲线是其低阶展开的解析近似。通常将这一灵敏度曲线看做等效噪声的振幅谱密度。

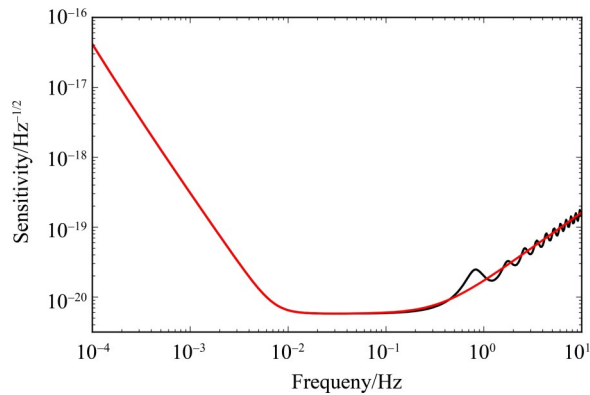


图 1 天琴的灵敏度曲线

Fig. 1 Sensitivity curve of TianQin

2.2 内积

考虑均匀的离散化采点, 有数据

$$D_i = D(t_i), \quad t_i - t_j = (i - j)\Delta t,$$

其中采样间隔 $\Delta t = \frac{T}{N - 1}$, N 为采样总数, T 为观测时间总长。

对于 N 维高斯噪声, 其概率由期望值 μ 和协方差矩阵 Σ 决定, 有

$$P(D|\mu, \Sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(D - \mu)^T \Sigma^{-1}(D - \mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma|}}$$

在稳态条件成立时, 期望值为常数, 不失普适性地, 可以假设其值为 0, 并且有

$$\Sigma_{ij} = R[(i - j)\Delta t],$$

其中 $R(\tau)$ 是噪声的自相关函数。可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} D^T \Sigma^{-1} D &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{j,k=1}^N \Delta t^2 R^{-1}[(j - k)\Delta t] D_j D_k \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_j \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt_k R^{-1}[(j - k)\Delta t] D_j D_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\tilde{D}^*(f)}{S_n(|f|)} \int_{-\infty}^{\infty} dt_k e^{2\pi i f t} D_k \\ &= 4 \int_0^{\infty} df \frac{\tilde{D}^*(f) \tilde{D}(f)}{S_n(f)}. \end{aligned}$$

这样, 可以定义两个函数 $h(t)$ 和 $g(t)$ 的内积

$$\begin{aligned} (h(t)|g(t)) &\equiv 2 \int_0^{\infty} df \frac{\tilde{g}^*(f) \tilde{h}(f) + \tilde{h}^*(f) \tilde{g}(f)}{S_n(f)} \\ &= 4\mathbf{R} \int_0^{\infty} df \frac{\tilde{g}^*(f) \tilde{h}(f)}{S_n(f)}, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{R} 表示实部。进一步地, 如果 h 和 g 都是实函数, 则有 $\tilde{g}^*(f) = g(-f)$, 而内积可以简化为

$$(h|g) = 4 \int_0^{\infty} df \frac{\tilde{g}^*(f) \tilde{h}(f)}{S_n(f)}.$$

通过定义内积这一公式的简化形式, 可以将噪声模型的似然函数写为

$$P(D|\mu, \Sigma) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(D|D)\right].$$

2.3 似然函数与似然函数比

通常, 可以将引力波信号的探测问题转化为一个统计学假设检验的问题。其中, 对于零假设 H_0 , 设定数据中不存在引力波信号, 因此可以表示为 $D(t) = n(t)$; 另一方面, 替代假设 H_1 则假设数据中同时包含信号和噪声, 即 $D(t) = n(t) + h(t)$ 。在频率学派的框架下, 如果要对两个不同的假说进行判断, 通常需要进行所谓假设检验 δ 。通过这一操作, 可以将数据分类到两个互斥的子集中 R 和 R' 。如果数据在 R 中, 则接受零假设; 反之则拒绝。

这个过程中, 我们可能会犯下两类错误, 即所谓 type I error, 又称为误警, 即 H_0 真实成立而将其错误归类到 H_1 ; 以及 type II error, 又称为漏警, 即 H_1 真实成立而将其错误归类到 H_0 。在假设检验的理论中, type I error 对应的概率被称为检验的显著性。反过来, 正确地将 H_0 的数据归类到 H_0 为上述命题的反命题, 由概率的加法法则可知其概率等于 $1 - \text{type I error}$ 对应的概率, 该值被称为检验的能力。

上述描述较为抽象, 下面从实际操作层面入手, 得到一个最优化检验方法。可以证明, 在 Bayesian、最小最大方法、Neyman-Pearson 方法等推导原则下, 似然函数比 $\Lambda(D)$ 具有较好的性质。

$$\Lambda(D) = \frac{P(D|H_1, I)}{P(D|H_0, I)}$$

在引力波数据处理中, 通常采用 Neyman-Pearson 表述, 即似然函数比在给定检验的显著性 (换言之, 即误警率) 的前提下, 可以最大化检验的能力。噪声模型的似然函数可以写为

$$P(D|H_0) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(D|D)\right]$$

另一方面, 由于信号与噪声是线性相加的, 我们可以建立替代模型的似然函数, 从数据中抽出信号后, 残余的部分应该符合噪声模型。换句话说, 假设信号 h 可以由参数 θ 决定性地写出 $h(\theta)$ 。替代模型的似然函数可写为

$$P(D|H_1(\theta)) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(D - h(\theta)|D - h(\theta))\right]$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}[(D|D) + (h(\theta)|h(\theta)) - 2(h(\theta)|D)]\right\}$$

代入似然函数比 Λ 的表达式, 则其中的系数与参数 $\Lambda(D)$ 无关, 因此不会影响最终的探测结果。所谓匹配滤波, 就是指通过不断变更波形模板 $h(\theta)$, 与数据进行匹配, 从而寻找出最佳的参数组合 θ 。

2.4 匹配滤波与 Wiener 最优滤波

可以证明, 上述匹配滤波的手段也是 Wiener 最优滤波的结果。考虑对数据 D 以未定模板 $K(t)$ 进行卷积操作, 有

$$D * K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t) + n(t)] K(t - \tau) dt$$

$$= \mathcal{S} + \mathcal{N},$$

其中

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{\infty} dt h(t) K(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{h}(f) \tilde{K}(f),$$

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{\infty} dt n(t) K(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{n}(f) \tilde{K}(f).$$

噪声的期望值为 0, 方差为 $\tilde{K}(f) = \frac{\tilde{h}(f)}{S_n(f)}$ 时,

等号成立。综上, 对于输入信号 $h(t)$ 而言, 只有用 $\tilde{h}(f)/S_n(f)$ 对应的逆傅里叶变换的模板去响应, 才能预期在统计上得到最大的信噪比, 此时的最优信噪比为 $\rho_{\text{opt}} = (\tilde{h}(f)|\tilde{h}(f))$ 。

$$\mathcal{N}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' K(t) K^*(t') < n(t) n(t')$$

$$\begin{aligned} &>= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' K(t) K^*(t') \\ &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \langle \tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f') \rangle \exp[2\pi i(ft - f't')] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f) \tilde{K}^*(f). \end{aligned}$$

定义信噪比 ρ 为

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{\mathcal{S}^2}{\mathcal{N}^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f) | \tilde{h}(f)\right)^2}{\left(\frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f) | \frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f)\right)} \\ &\leq \frac{\left(\frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f) | \frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f)\right) (\tilde{h}(f) | \tilde{h}(f))}{\left(\frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f) | \frac{1}{2} S_n(f) \tilde{K}(f)\right)} \\ &= (\tilde{h}(f) | \tilde{h}(f)). \end{aligned}$$

3 探测与测量

一般而言, 引力波数据分析可以分为两个部分: 探测与测量。探测意味着不漏过任何一个可能的参数组合, 发现所有潜在的信号, 这个过程的重点是降低漏警率和误警率; 测量则意味着在成功探测的前提下对参数空间进行分析, 得到后验概率分布, 这个过程的重点是实现高效、准确的后验概率估计^[18]。

3.1 信号探测

空间引力波探测预期可以观测到银河系内致密双星、大质量双黑洞、极端质量比旋近、恒星级双黑洞旋近、随机引力波背景等信号。根据信号特性, 在匹配滤波基础上, 还可以有针对性地进行搜索算法的分析^[19-25]。下面我们以银河系内致密双星和随机引力波背景为例开展讨论。

3.1.1 银河系内致密双星 有一类引力波源本身功率并不高, 在一段较长的观测时间内系统构型并不会发生明显的变化, 这类源统称为连续引力波源。空间引力波探测器可以记录大量的银河系内致密双星系统, 在观测时间内其频率演化极为缓慢, 对这类信号的描述往往可以用正弦函数或在其基础上的修正得到^[26]。

由于探测器相对地月系质心存在运动, 而地月系又有相对太阳系质心的运动, 这些运动引起的多普勒频移会使引力波的波形进一步复杂化。因此, 一般将讨论先放在太阳系质心考虑, 再转换到具体的探测器坐标系中。

连续引力波源往往可以由振幅不变、且频率

近似不变的三角函数去描述。此时, 源信号可以表征为

$$h_+(t) = A_+ \cos \Phi(t) \quad h_-(t) = A_- \cos \Phi(t).$$

将瞬时频率 $f(t)$ 定义为 $2\pi f(t) \equiv d\Phi(t)/dt$ 。这样, 在选定频率零点后, 就可以将相位 Φ 在零点 t_{ref} 附近进行 Taylor 展开, 即

$$\Phi(t) \equiv \phi_0 + \phi(t) \phi_0 \equiv \Phi(t_{\text{ref}}),$$

$$\phi(\Delta t) \equiv 2\pi \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(s)}(t_{\text{ref}})}{(s+1)!} (\Delta t)^{s+1},$$

其中 $f^{(s)}(t) \equiv \frac{d^s f(t)}{dt^s}$ 是瞬时频率 $f(t)$ 在零点 t_{ref} 时刻的 s 阶求导。在 τ 时刻, 对单位方向向量为 \hat{n} 的信号来说, SSB 和探测器 X 之间的转换主要集中于时间 t 的转换关系

$$\Delta t^X(\tau, \hat{n}) \equiv t^X - t_{\text{ref}} \approx \tau - t_{\text{ref}} + \frac{r^X(\tau) \cdot \hat{n}}{c},$$

其中 c 表示光速。

在上述的表述中, 我们将信号的来源 \hat{n} 作为参数进行考虑, 但是探测器对于给定信号的响应还依赖于极化角 ψ 这一参数。可以将天线响应函数分解为含时和不含时的两个部分:

$$F_+^X = a^X(t, \hat{n}) \cos 2\psi + b^X(t, \hat{n}) \sin 2\psi,$$

$$F_-^X = b^X(t, \hat{n}) \cos 2\psi - a^X(t, \hat{n}) \sin 2\psi.$$

由此, 探测器记录到的波形总共可以由 4 个不算时间变化的参数, 即 A_+ , A_- , 初始相位 ϕ_0 和偏振角 ψ 。可以定义 4 个与探测器无关的新参数

$$\mathcal{A}^1 \equiv A_+ \cos \phi_0 \cos 2\psi - A_- \sin \phi_0 \sin 2\psi,$$

$$\mathcal{A}^2 \equiv A_+ \cos \phi_0 \sin 2\psi + A_- \sin \phi_0 \cos 2\psi,$$

$$\mathcal{A}^3 \equiv -A_+ \sin \phi_0 \cos 2\psi - A_- \cos \phi_0 \sin 2\psi,$$

$$\mathcal{A}^4 \equiv -A_+ \sin \phi_0 \sin 2\psi + A_- \cos \phi_0 \cos 2\psi.$$

对应地, 定义参数集 $\lambda \equiv \{\hat{n}, f^{(s)}(t_{\text{ref}})\}$, 并将探测器记录到的信号分解

$$h^X(t, \mathcal{A}, \lambda) = \sum_{\mu=1}^4 \mathcal{A}^\mu h_\mu^X(t, \lambda),$$

其中

$$h_1^X(t, \lambda) = a^X(t) \cos \phi(\Delta t^X),$$

$$h_2^X(t, \lambda) = b^X(t) \cos \phi(\Delta t^X),$$

$$h_3^X(t, \lambda) = a^X(t) \sin \phi(\Delta t^X),$$

$$h_4^X(t, \lambda) = b^X(t) \sin \phi(\Delta t^X).$$

由于可以将信号作类似的拆分, 因此, 代入似然函数比后, 可以得到

$$\log \mathcal{L}(D, \mathcal{A}, \lambda) = (h|D) - \frac{1}{2} (h|h)$$

$$= \mathcal{A}^\mu D_\mu - \frac{1}{2} \mathcal{A}^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} \mathcal{A}^\nu,$$

并且, 我们定义

$$D_\mu(\lambda) \equiv (h_\mu|D),$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}(\lambda) \equiv (h_\mu|h_\nu),$$

其中 $h_\mu = \partial h / \partial \mathcal{A}^\mu$ 。

通过对式子求最大值, 不难发现似然函数比最大时, 其对 \mathcal{A} 的偏导皆为 0, 于是可以定义所谓 \mathcal{F} -统计, 也就是

$$\mathcal{F}(D, \lambda) \equiv \max_{\mathcal{A}} \log \mathcal{L}(D, \mathcal{A}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathcal{A}^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} \mathcal{A}^\nu.$$

需要注意的是, 这里定义 $\mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$, 也就是两者互为逆矩阵。

可以发现, 最大似然函数比条件下, 可以推导出振幅 \mathcal{A}^μ 的估计值为

$$\mathcal{A}_{\text{MLR}}^\mu = \mathcal{M}^{\mu\nu} D_\nu.$$

换言之, 也可以将 \mathcal{F} -统计转换为

$$2\mathcal{F} = \mathcal{A}_{\text{MLR}}^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu} \mathcal{A}_{\text{MLR}}^\nu.$$

由于探测器相对太阳系质心的运动, 与探测器绑定的探测器坐标系随时间变化, 因此探测器对给定引力波源的响应也随时间变化, 且响应的改变会引起振幅的调制。此外, 由于连续引力波信号的频率 f_s 基本不随时间变化, 而功率谱密度在较小的范围内可以看成常数, 所以相应的内积可以近似为

$$(alb) = 4\mathbf{R} \int_0^\infty df \frac{\tilde{a}(f) \tilde{b}(f)}{S_n(f)} \approx \frac{2}{S_n(f_s)} \int_0^T dt a(t) b(t).$$

基于天琴星座平面固定指向的特点, 可以给天琴对双白矮星引力波信噪比的解析表达式。信噪比的定义为信号与自身的内积

$$\rho^2 = (\tilde{h}(f)|\tilde{h}(f)) \approx \frac{2\langle A^2 \rangle T}{S_n(f_s)},$$

其中平均振幅定义为

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt h^2(t).$$

这些近似的表达式可以直接用在时域上解析地计算信噪比, 而不用在频域上计算数值积分, 这样有助于缩短计算时间。

如前所述, 探测器相对于地月系质心和太阳系质心均有运动, 这种运动会引入多普勒频移和相位调制

$$f = f_0 \left(1 + \frac{v \cdot \hat{n}}{c} \right),$$

其中 v 是探测器的速度。频率随着时间的变化可以

表述为速度变化的函数

$$(\Delta f)_{\text{Doppler}} = f_0 \frac{(\Delta v)_T}{c}.$$

当然, 这一效应并非一定需要考虑。将一个时域数据进行离散傅里叶变换到频率域后, 在频率域上离散的数据点对应的频率为 $\Delta f, 2\Delta f, 3\Delta f, \dots, N\Delta f/2$, 其中 N 是时域采样数, $\Delta f = 1/T$, 不难得出, $N\Delta f = \frac{N}{T} = f_{\text{sample}}$ 是时间域的采样率。

若多普勒频移在频率域上的影响低于频率分辨率, 便意味着所有的效应都在同一个频率间隔内, 可以不用考虑。反之, 则同一频率的信号分散在多个频率间隔中, 需要考虑多普勒频移的效应。

一些中子星或者双白矮星系统, 可能已经被电磁波手段探测到, 并精确测量出其空间位置、频率、频率演化等各类参数。针对这类已知源, 通过 \mathcal{F} -统计的方法在数据中搜索信号时, 实际上就是在外乘参数的参数空间上解析地求似然函数比的极值。然而, 我们预期数据中包含着许多之前未知的引力波信号。对这类未知源, 需要通过不断改变内乘参数的组合, 对数据进行匹配, 进而实现对信号的探测。

我们考虑空间上两个相距 $\Delta\theta$ 的点 A 和 B 。由于位置不一样, 导致用 A 点的波形去匹配 B 点的数据时, 会产生 $|\Delta f| = fv \cdot (\hat{n} - \hat{n}') \leq fv\Delta\theta$ 的频率调制。考虑数据的频率分辨率, 即可估算出在搜索未知源时对空间参数的允许偏移量。而若要覆盖全天, 则需要共 N_{sky} 个独立波形的尝试

$$N_{\text{sky}} \sim \frac{4\pi}{(\Delta\theta)^2} \sim 4\pi T^2 f_{\text{max}}^2 (v/c)^2.$$

代入一年的观测时间, 1 Hz 的采样频率, 和地球运动速度 $v \sim 30 \text{ km/s}$ 后, 可以计算出 $N_{\text{sky}} \sim 10^8$ 。考虑到对每个方向, 都需要将数据转换到太阳系质心后作傅里叶变换, 而傅里叶变换的计算量正比于 Tf_{max} , 故总计算量可估算出正比于 $T^3 f_{\text{max}}^3 (v/c)^2$ 。注意上述计算基于单频近似, 即 $f_s = 0$, 如果考虑频率演化, 则总的计算数会进一步正比于 T^2 , 最终使计算量正比于 T^5 [27]。

可以看到, 积分时间越长, 搜寻信号所需的计算量越大。因此, 比较实际的方法是只对一小段数据进行 \mathcal{F} -统计计算, 然后对不同数据段之间做自洽性检验, 即所谓的半相干搜索方法。

3.1.2 随机引力波背景 我们将由大量引力波信号非相干叠加而成的、无法单独为探测器分辨的信号称为随机引力波背景。其特殊的性质导致无法采用匹配滤波的方法对随机引力波进行建模和分析。因此, 必须对随机引力波背景进行特殊的数据处理方法开发。对于空间引力波探测而言, 主要分为互相关与空通道两种方法 [28]。

考虑两个通道 I, J , 分别将数据分为信号和噪声

$$\begin{aligned} s_I(t) &:= h_I(t) + n_I(t), \\ s_J(t) &:= h_J(t) + n_J(t). \end{aligned}$$

将数据分成多份后, 引入滤波函数 $Q(t, t')$ 分别进行互相关计算, 并定义统计量

$$S := \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' s_I(t) s_J(t') Q(t, t'),$$

其中 T 为样本时间。在噪声与随机引力波背景均为稳态的前提下, 滤波函数只依赖于 $\Delta t = t' - t$, 即 $Q(t, t') = Q(t' - t)$, 在 T 足够大的前提下, 可以近似

$$S \approx \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' s_I(t) s_J(t') Q(t' - t).$$

由于积分项中的函数都是连续的, 在化简时可交换积分次序

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{s}_I(t) \tilde{s}_J(t') Q(t' - t) \\ &\quad \times e^{-i2\pi f'(t' - t)} e^{i2\pi f(t' - t)} e^{i2\pi f t} e^{-i2\pi f' t'}. \end{aligned}$$

考虑数据切分为 n 份的情形, 总观测时长 $T_{\text{tot}} = nT$ 。对于每一份数据, 由互相关原理, 求得 S 的期望值

$$\begin{aligned} \mu := \langle S \rangle &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \langle \tilde{h}_I(t) \tilde{h}_J^*(t') \rangle Q(t' - t) \\ &\quad \times e^{-i2\pi f'(t' - t)} e^{-i2\pi f(t' - t)} \\ &= T \int_0^{\infty} df \Gamma_{IJ}(f) S_h(f) \tilde{Q}(f), \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{Q}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' Q(t' - t) e^{-i2\pi f'(t' - t)}.$$

再计算对应的方差

$$\sigma^2 := \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 = \frac{T}{2} \int_0^{\infty} df P_{n_I}(f) P_{n_J}(f) |\tilde{Q}(f)|^2,$$

其中通道的单边噪声功率谱密度 (PSD) 定义为

$$\langle \tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f') \rangle = \frac{1}{2} \delta(f - f') P_n(f).$$

这里我们假设两通道的噪声不存在相关性。

可以证明, 当滤波函数为以下形式

$$\tilde{Q}(f) = \lambda \frac{\Gamma_{II}^2(f) S_h^2(f)}{P_{n_i}(f) P_{n_j}(f)},$$

能够得到单个样本的最优信噪比

$$\text{SNR}_{\text{sgl}} = \sqrt{2T} \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{\Gamma_{II}^2(f) S_h^2(f)}{P_{n_i}(f) P_{n_j}(f)} \right]^{1/2}.$$

对于总的信噪比, 有

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \sqrt{2nT} \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{\Gamma_{II}^2(f) S_h^2(f)}{P_{n_i}(f) P_{n_j}(f)} \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{2T_{\text{tot}}} \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{\Gamma_{II}^2(f) S_h^2(f)}{P_{n_i}(f) P_{n_j}(f)} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

其中 $[f_{\min}, f_{\max}]$ 为探测器的灵敏频段, 这里信噪比会随着时间的增加而增加。

当有多个引力波探测器独立运作时, 可以利用互相关方法进行对随机引力波背景的搜索。但是如只有一个探测器运行时, 则无法使用互相关方法。但类似天琴、LISA 的空间引力波探测器, 可以构造出三个不同的通道。特别地, 在简单数据处理后, 可以构造出对引力波信号不敏感的空通道。空通道方法就利用这一噪声通道实现对随机引力波背景的探测。

以第一代时间延迟干涉 (TDI) 通道为例, 可以构造出三个通道 A, E 和 T, 其中 T 为空通道, A 和 E 为正交的信号通道, 则可以分别描述

$$\begin{aligned} s_T(t) &:= n_T(t) s_I(t) := h_I(t) + n_I(t), \\ s_{\text{null}}(t) &:= \sum_{j=A,E} \left[s_I(t) - \sqrt{a_I(t)} s_T(t) \right]. \end{aligned}$$

构造统计量

$$S := \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' s_{\text{null}}(t) s_{\text{null}}(t') Q(t, t'),$$

其期望值为

$$\begin{aligned} \mu := \langle S \rangle &= \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' \langle s_{\text{null}}(t) s_{\text{null}}(t') \rangle Q(t, t') \\ &= 2T \int_0^\infty df \Gamma_{II}(f) S_h(f) \tilde{Q}(f). \end{aligned}$$

这里假设通道 A(E) 和 T 的功率谱密度有函数关系

$$P_{n_A}(f) = a_A(f) P_{n_T}(f),$$

另一方面, S 的方差为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &:= \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2 \\ &= 2T \int_0^\infty df P_{n_i}^2(f) |\tilde{Q}(f)|. \end{aligned}$$

同样可以得到, 当滤波函数取

$$\tilde{Q}(f) = \lambda \frac{\Gamma_{II}^2(f) S_h^2(f)}{P_{n_i}^2(f)},$$

则, 得到最优信噪比

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \sqrt{2nT} \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{\Gamma_{II}^2(f) S_h^2(f)}{P_{n_i}^2(f)} \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{2T_{\text{tot}}} \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{\Gamma_{II}^2(f) S_h^2(f)}{P_{n_i}^2(f)} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

注意, 在构建探测统计量的时候, 我们用了 A 和 E 两个通道的数据, 所以最终得到的信噪比与互相关探测的信噪比在形式上是可以统一的

$$\text{SNR} = \sqrt{2T_{\text{tot}}} \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{\Gamma_{II}^2(f) S_h^2(f)}{P_{n_i}(f) P_{n_j}(f)} \right]^{1/2}.$$

当 $I = J$ 时空通道探测的信噪比, 当 $I \neq J$ 时为互相关探测的信噪比。

下面, 我们讨论探测阈值^[29-30]。将总时长为 T_{tot} 的数据分成 n 份时长为 T 的独立数据, 并定义每个样本数据为 S_1, S_2, \dots, S_n , 该样本均值以及样本方差分别为

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i, \\ \hat{\sigma} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (S_i - \hat{\mu})^2. \end{aligned}$$

当对数据切分足够多次后, 由于大数定理, 计算出的 S 符合高斯分布。要判断实际响应中是否包含随机引力波背景, 首先根据数据样本的期望值 $\hat{\mu}$ 和方差 $\hat{\sigma}$, 对于足够大的 n , 构造统计量

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n S_i - n\hat{\mu}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (S_i - \hat{\mu})^2}} \approx \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}.$$

若这 n 次独立事件满足期望值为 μ , 方差为 $\hat{\sigma}^2$ 的正态分布, 构造之后的 z 便满足标准正态分布

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right].$$

定义互补误差函数

$$\text{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty dx e^{-x^2},$$

则有

$$z_\alpha = \sqrt{2} \text{erfc}^{-1}(2\alpha).$$

对于实际数据, 存在以下两种情况:

- 1) 不存在随机引力波背景: H_0 , 对应 $s \in R_0$;
- 2) 存在随机引力波背景: H_1 , $\mu > 0$, 对

应 $s \in R_1$ 。

它们的概率密度函数分别为

$$p(s|0) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{S_i^2}{2\hat{\sigma}^2}\right],$$

$$p(s|\mu) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^n \frac{(S_i - \mu)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right],$$

定义误警率 α 和漏警率 β ,

$$\alpha = \int_{R_1} ds p(s|0),$$

$$\beta = \int_{R_0} ds p(s|\mu).$$

误警率 α 表示在没有随机引力波背景的前提下噪声被错误的归类为随机引力波背景的概率; 漏警率 β 则表示真实的随机引力波背景被错误地归类为噪声的概率。可以推导出 $1 - \alpha$ 即代表判据准确地确定了不存在随机引力波背景, $\gamma(\mu) = 1 - \beta$ 则是探测率。

要判断信号响应中是否存在随机引力波背景, 就要根据 μ 的取值以及预期的探测率

$$1 - \beta(\mu) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\mu}{\hat{\sigma}}}{\sqrt{2}}\right) \geq \gamma,$$

则有

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \sqrt{n} \text{SNR}_{\text{sgl}} \\ &= \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} \geq z_\alpha - \sqrt{2} \operatorname{erfc}^{-1}(2\gamma) \\ &= \sqrt{2} [\operatorname{erfc}^{-1}(2\alpha) - \operatorname{erfc}^{-1}(2\gamma)], \end{aligned}$$

其中 SNR_{sgl} 为单个样本信噪比的平均值, 所以人为设定误警率 α 和探测率 γ , 便能够求得信噪比的阈值。

例如若误警率 $\alpha = 0.1$, 探测率 $\gamma = 0.9$, 则信噪比的最小值为

$$\text{SNR} = \operatorname{erfc}^{-1}(0.1) - \operatorname{erfc}^{-1}(1.9) = 3.30.$$

误警率越低、探测率越高, 探测随机引力波背景所需要的 SNR 阈值越高。

3.2 参数估计

在实现信号探测后, 需要通过马尔科夫链蒙特卡洛或层级采样等方法对相应的后验概率分布进行估计, 得出引力波源的物理参数信息。从技术层面而言, 采用的似然函数与探测过程并没有区别, 只是利用随机采样算法对后验概率进行估计时, 通常伴随着极高的计算资源需求, 因此只能有选择性地应用到有限的事件。在引力波探测

器实际运行之前, 为了实现科学目标评估的目的, 还可以借助 Fisher 信息矩阵方法对参数测量的协方差矩阵进行分析^[14]。

3.2.1 Fisher 信息矩阵 假设真实参数 $\theta_0(s)$ 对应的估计值为 $\hat{\theta}(s)$, 其中 s 为探测数据, 在高斯稳态噪声的前提下, 有

$$\langle \hat{\theta}(s) \rangle_n = \theta_0, \quad \partial_{\theta_0} \langle \hat{\theta}(s) \rangle_n = 1.$$

根据定义, 其方差为

$$\operatorname{var} \hat{\theta} = \left\langle \left(\hat{\theta}(s) - \langle \hat{\theta}(s) \rangle_n \right)^2 \right\rangle_n = \left\langle \left(\hat{\theta}(s) - \theta_0(s) \right)^2 \right\rangle_n.$$

定义系综乘积 (ensemble product)

$$\langle u(s), v(s) \rangle_n = \int u(s) v(s) p(s|\theta_0) ds,$$

其中 $p(s|\theta_0)$ 为似然概率。令残差 $v(s) = \hat{\theta}(s) - \theta_0$, 有

$$\operatorname{var} \hat{\theta} \equiv \langle v, v \rangle_n \geq \frac{\langle u, v \rangle_n^2}{\langle u, u \rangle_n}.$$

令 $u(s) = \partial_{\theta_0} \log p(s|\theta_0)$, 则

$$\begin{aligned} \langle u(s), v(s) \rangle &= \int v(s) \left[\partial_{\theta_0} \log p(s|\theta_0) \right] p(s|\theta_0) ds \\ &= \int v(s) \partial_{\theta_0} p(s|\theta_0) ds \\ &= \partial_{\theta_0} \int v(s) p(s|\theta_0) ds \\ &= \partial_{\theta_0} \langle v(s) \rangle_n = \partial_{\theta_0} \langle \hat{\theta}(s) \rangle_n = 1. \end{aligned}$$

可以证明

$$\begin{aligned} \operatorname{var} \hat{\theta} &\geq \frac{1}{\langle u(s), u(s) \rangle} \\ &\equiv \frac{1}{\left(\partial_{\theta_0} \log p(s|\theta_0) | \partial_{\theta_0} \log p(s|\theta_0) \right)_n}, \end{aligned}$$

则在多维参数空间下, 上式可推广为

$$\begin{aligned} \operatorname{covar}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j) &\geq \frac{1}{\left(\partial_{\theta_i} \log p(s|\theta_0) | \partial_{\theta_j} \log p(s|\theta_0) \right)_n} \\ &= \Gamma_{ij}^{-1}. \end{aligned}$$

利用 $p(s|\theta) \propto e^{-\frac{(s-h(\theta), s-h(\theta))}{2}}$, 则 Fisher 矩阵的表达式为

$$\Gamma_{ij} = \left(\partial_{\theta_i} \log p(s|\theta_0) | \partial_{\theta_j} \log p(s|\theta_0) \right)_n = \left(\partial_{\theta_i} h | \partial_{\theta_j} h \right).$$

根据探测器噪声的功率谱密度, 在代入引力波波波形后, 即可通过 Fisher 信息矩阵, 获得不同参数间的协方差矩阵, 从而估算预期的参数估计结果^[31]。

3.2.2 随机采样算法 对真实或模拟数据开展参数估计的过程, 通常借用随机采样的统计方法实现贝叶斯推断。该领域近年取得了巨大进展, 包

括马尔科夫链蒙特卡洛算法、层级采样,甚至贝叶斯机器学习等,都能以较高的效率实现参数估计。其基本原理是,根据贝叶斯定理,把对模型参数后验概率密度的计算转换为在给定模型和数据的情况下,对先验概率密度和似然函数的计算^[32-33]。在具体的操作过程中,由于涉及参数多需要采取马尔科夫链蒙特卡洛采样(MCMC)和层级采样(nested sampling)等方法提高计算效率。

贝叶斯定理表述为

$$P(\theta|D, M) = \frac{L(D|\theta, M) \pi(\theta|M)}{Z(D|M)},$$

其中 θ 代表模型参数, D 代表实验观测数据,而 M 一般性的表示背景、环境、模型等的信息。等式左边是给定数据情况下模型参数的概率密度 $P(\theta|D, M)$,等式右边的 $\pi(\theta|M)$ 是先验概率密度。 $L(D|\theta, M)$ 表示似然函数。而 $Z(D|M)$ 则是一个与模型参数无关的归一化常数,称之为证据(evidence),一般只在模型选择(model selection)中起作用,根据概率密度归一化的性质,有

$$Z = \int d\theta L(D|\theta, M) \pi(\theta|M).$$

先验概率密度表示的是人们分析数据之前,根据模型对参数的了解情况。似然函数表示的是在给定模型参数值的情况下观测到数据的概率密度,表示对观测的描述,其中也包含噪声(noise)的模型,最常见的是高斯型的似然函数

$$L(D|\theta, M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(D - \mu(\theta))^2}{\sigma^2}},$$

其中已经假设观测过程中仪器的噪声是高斯型。

一种常见的MCMC是梅特罗波利斯-黑斯廷斯算法(Metropolis - Hastings algorithm),下面以此为例做简单介绍。假设 $P(\theta)$ 是目标后验概率密度分布。梅特罗波利斯-黑斯廷斯算法的过程为^[34]:

1) 初始化。选定初始状态 θ_0 ; 令 $t = 0$;

2) 迭代过程。首先生成:从某一容易采样的分布 $Q(\theta'|\theta_t)$ 中随机生成候选状态 θ' ;然后计算:计算是否采纳候选状态的概率

$$A(\theta'|\theta) = \min\left(1, \frac{P(\theta') Q(\theta|\theta')}{P(\theta) Q(\theta'|\theta)}\right);$$

3) 接受或拒绝。从 $[0, 1]$ 的均匀分布中生成

随机数 u ;如果 $u \leq A(\theta'|\theta)$,则接受该状态,并令 $\theta_{t+1} = \theta'$;如果 $u > A(\theta'|\theta)$,则拒绝该状态,并令 $\theta_{t+1} = \theta$ (复制状态);

4) 增量。令 $t = t + 1$ 。

层级采样方法的基本思想是通过蒙特卡洛方法对先验概率密度随机均匀撒点,通过不断迭代产生似然函数取值由大到小的序列,完成取样过程^[35]。

形式上由先验概率密度我们可以定义先验分布函数

$$\xi(\lambda) = \int_{L(\theta) > \lambda} \pi(\theta) d\theta.$$

从而将证据的计算从多维参数空间转换到单参数空间的一维积分,即

$$Z = \int_0^1 L(\xi) d\xi.$$

层级取样的具体过程如下:

首先,在先验概率密度的参数空间随机均匀取 N 个点, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ 。然后

1) 初始化。令 $Z = 0, \xi_0 = 0$ 。对 $i = 1, 2, \dots, j$,重复以下过程:

2) 将当前似然函数的最小值记录为 L_i ;

3) 先验分布函数可粗略令为 $\xi_i = e^{-i/N}$;

4) 令积分权重为 $\omega_i = \xi_{i-1} - \xi_i$;

5) Z 的增量则为 $\omega_i L_i$;

6) 然后将似然函数的最小值点用一个 $L(\theta) > L_i$ 范围内新的正比于先验概率密度 $\pi(\theta)$ 的点代替。

Z 的增量为 $N^{-1} (L(\theta_1) + L(\theta_2) + \dots + L(\theta_N)) \xi_j$ 。

4 结 语

天琴预期可以探测包括银河系双白矮星、大质量双黑洞、极端质量比旋近、恒星级双黑洞、随机引力波背景等不同的引力波信号。针对不同的信号开发信号搜索、参数测量方法具有重要的意义。本文中简单讨论了天琴引力波数据处理的技术原理,但实际实践中,还会面临多种类信号混叠、探测器数据间隔、噪声非高斯非稳态等问题;也会存在多探测器联合所带来的多信使天文学数据分析、多波段引力波探测数据处理、多引力波探测器组网综合等新的挑战。

参考文献:

[1] WEBER J. Evidence for discovery of gravitational radiation [J]. Physical Review Letters, 1969, 22:1320.

tion [J]. Physical Review Letters, 1969, 22:1320.

- [2] HOUGH J. Essay review, gravitational waves under the microscope [J]. *Annals of Science*, 2006, 63:371-375.
- [3] BICEP2 Collaboration. Detection of B-mode polarization at degree angular scales by BICEP2 [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112:241101.
- [4] BICEP2/Keck and Planck Collaborations. Joint analysis of BICEP2/Keck array and planck data [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 114:101301.
- [5] ABBOTT B P, et al (LIGO Scientific Collaboration, CollaborationVirgo). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116: 061102.
- [6] ABBOTT B P, et al (LIGO Scientific Collaboration, CollaborationVirgo). Binary black hole mergers in the first advanced LIGO observing run [J]. *Physical Review X*, 2016, 6: 041015.
- [7] ABBOTT B P, et al (LIGO Scientific Collaboration, CollaborationVirgo). GW170104: observation of a 50-Solar-Mass binary black hole coalescence at Redshift 0.2 [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118: 221101.
- [8] ABBOTT B P, et al (LIGO Scientific Collaboration, CollaborationVirgo). GW170814: a three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119: 141101.
- [9] ABBOTT B P, et al (LIGO Scientific Collaboration, CollaborationVirgo). GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119: 161101.
- [10] ABBOTT B P, et al (LIGO Scientific Collaboration, CollaborationVirgo). GW170608: observation of a 19-solar-mass binary black hole coalescence [J]. *Astrophysical Journal Letters*, 2017, 851: L35.
- [11] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, FERMI G B M, et al. Multi-Messenger observations of a binary neutron star merger [J]. *Astrophysical Journal Letters*, 2017, 848: L12.
- [12] 胡一鸣. 引力波数据分析 [EB/OL]. https://github.com/yiminghu-SYSU/GW_DA_notes.
HU Y M. Gravitational wave data analysis [EB/OL]. https://github.com/yiminghu-SYSU/GW_DA_notes.
- [13] HU Y M, MEI J W, LUO J. Science prospects for space-borne gravitational-wave missions [J]. *National Science Review*, 2017, 4: 683.
- [14] VALLISNERI M. Use and abuse of the fisher information matrix in the assessment of gravitational-wave parameter-estimation prospects [J]. *Physical Review D*, 2008, 77:042001.
- [15] BABAK S, BAKER J G, BENACQUISTA M J, et al. The mock LISA data challenges: from challenge 3 to challenge 4 [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2010, 27:084009.
- [16] ARNAUD K, BABAK S, BAKER J G, et al. An overview of the mock LISA data challenges [C]//AIP Conference Proceedings, 2006, 873:619.
- [17] HU Y M. Novel inference methods for gravitational wave astrophysics [D]. Scotland, UK : University of Glasgow, 2015.
- [18] LEE S, FIN N. Detection, measurement, and gravitational radiation [J]. *Physical Review D*, 1992, 46: 5236.
- [19] HU X, LI X, WANG Y, et al. Fundamentals of the orbit and response for TianQin [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2018, 35:03368.
- [20] FENG W, WANG H, HU X, et al. Preliminary study on parameter estimation accuracy of super massive black hole binary inspirals for TianQin [J]. *Physical Review D*, 2019, 99:123002.
- [21] WANG H, JIANG Z, SESANA A, et al. Science with the TianQin observatory: Preliminary results on massive black hole binaries [J]. *Physical Review D*, 2019, 100:043003.
- [22] SHI C, BAO J, WANG H, et al. Science with the TianQin observatory: Preliminary results on testing the no-hair theorem with ringdown signals [J]. *Physical Review D*, 2019, 100:044036.
- [23] LIU S, HU Y, ZHANG J, et al. Science with the TianQin observatory: Preliminary results on stellar-mass binary black holes [J]. *Physical Review D*, 2020, 101: 103027.

- [24] HUANG S, HU Y, KOROL V, et al. Science with the TianQin observatory: Preliminary results on Galactic double white dwarf binaries [J]. *Physical Review D*, 2020, 102:063021.
- [25] FAN H, HU Y, BARAUSSE E, et al. Science with the TianQin observatory: Preliminary results on extreme-mass-ratio inspirals [J]. *Physical Review D*, 2020, 102:063016.
- [26] JARANOWSKI P, KRÓLAK A, BERNARD F, et al. Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars I, the signal and its detection [J]. *Physical Review D*, 1998, 58:063001.
- [27] BECKER W. *Neutron stars and pulsars* [M]. Princeton, Germany : Springer, 2009.
- [28] ROMANO J, CORNISH N. Detection methods for stochastic gravitational-wave backgrounds: a unified treatment [J]. *Living Reviews in Relativity*, 2017, 20:2.
- [29] ALLEN B. The Stochastic gravity wave background: sources and detection [EB/OL]. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9604033>.
- [30] ALLEN B, ROMANO J. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: signal processing strategies and sensitivities [J]. *Physical Review D*, 1997, 59:102001.
- [31] CREIGHTON J, ANDERSON W. *Gravitational-Wave physics and astronomy: an introduction to theory, experiment and data analysis* [M]. Wiley-VCH, 2011.
- [32] GREGORY P. *Bayesian logical data analysis for the physical sciences* [M]. Cambridge University Press, 2005.
- [33] JAYNES E. *Probability theory: the logic of science* [M]. Cambridge University Press, 2003.
- [34] HASTINGS W K. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications [J]. *Biometrika*, 1970, 57: 97-109.
- [35] SKILLING J. Nested sampling for general Bayesian computation [M]. *Bayesian Anal*, 2006, 1:833.

(责任编辑 王海蓉)